(δηλ. το είδος των αντεξήλιπτικών)

Μάθημα 10ο

23-3-2016

• **Συστήματα με ένα βαθμό ελευθερίας**

Αυτά τα συστήματα χρειάζονται μόνο μία παράμετρο για να καθορίσουμε πλήρως την τροχιά του συστήματος. Η εξίσωση $m\ddot{x}=F(x)$ είναι ένα τέτοιο σύστημα διότι ορίζει μόνο την παράμετρο $x=x(t)$. Η λύση της εξίσωσης καθορίζει τόσο τη θέση όσο και την ταχύτητα του υλικού σημείου. Γνωρίζουμε ότι είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $\frac{1}{2}m(\dot{x})^2+V(x)=E$, όπου $F(x)=-\frac{dV}{dx}$

Λύνουμε ως προς x, δηλαδή:

$$\frac{1}{2}m(\dot{x})^2 + V(x) = E \Rightarrow \boxed{(\dot{x})^2 = \frac{2}{m}\left[E - V(x)\right]}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{E - V(x)}$$

Τα πρόσημα αντιστοιχούν στο μέρος της τροχιάς για το οποίο $v = \frac{dx}{dt} = \dot{x} \gtrless 0$ (δηλ. θετική και αρνητική ταχύτητα)

Η εξίσωση είναι πλέον χωριζομένων μεταβλητών δηλ:

$$\frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}}\,dt \Rightarrow dt = \pm\sqrt{\frac{m}{2}}\left[E - V(x)\right]^{-1/2} dx$$

$$\Rightarrow t - t_0 = \pm\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{x_0}^{x}\left[E - V(x')\right]^{-1/2} dx'$$

Η σταθερά ολοκλήρωσης E (συνολική ενέργεια) καθορίζεται από την αρχική θέση και ταχύτητα του υλικού σημείου. Δηλαδή: $E = \frac{1}{2}m(\dot{x})^2 + V(x)$ ισχύει $\forall x$, άρα και για $\begin{cases} x = x_0 = x(0) \\ \dot{x} = \dot{x}(0) = v_0 \end{cases}$

Άρα,

$$E = \frac{1}{2}m v_0^2 + V(x_0)$$

Η λύση της εξίσωσης $x = x_0$

$$\frac{1}{2}m(\dot{x})^2 + V(x) = \frac{1}{2}m v_0^2 + V(x_0)$$

Η λύση αυτή λέγεται λύση ισορροπίας δηλ. αν το σωματίδιο τοποθετηθεί στο σημείο αυτό ισορροπεί και έχει μηδενική ταχύτητα. Επομένως στο σημείο αυτό θα έχει και μηδενική επιτάχυνση.

Δηλαδή στα σημεία ισορροπίας $F(x_0) = 0$

Όμως $F(x) = -\frac{dV}{dx}$. Άρα τα σημεία αυτά αντιστοιχούν στα ακρότατα της $V(x)$ ως μέγιστα ή ελάχιστα.

(Τα σταθερά σημεία μιας εξίσωσης βρίσκονται μόνο σε ακρότατα δυναμικά (δηλ. δεν παρουσιάζεται η εξεταζόμενη μεταβλητή μέσα στη δ.ε.))

• Τρόποι Εύρεσης Σημείων Ισορροπίας

(1) Τα σημεία ισορροπίας είναι οι λύσεις της αλγεβρικής εξίσωσης $\boxed{F(x_0)=0}$

(2) Ισοδύναμα είναι οι λύσεις της αλγεβρικής εξίσωσης $\boxed{E=V(x_0)}$

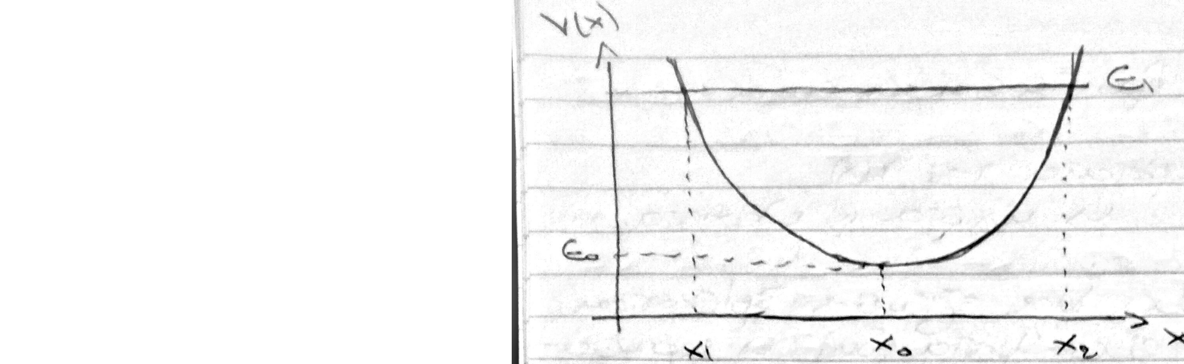
(3) Τα σημεία ισορροπίας είναι οι λύσεις της αλγεβρικής εξίσωσης $\boxed{\frac{dV}{dx}=0}$

Παρατήρηση (Σημαντική)

Από την εξίσωση $(\dot{x})^2 = \frac{2}{m}[E - V(x)]$ μπορώ να βρω τα όρια της κίνησης χωρίς να λύσω την διαφορική εξίσωση. Απαιτώ $\boxed{E - V(x) > 0}$ ή $\boxed{V(x) < E}$ και λύνω την ανίσωση ως προς x.

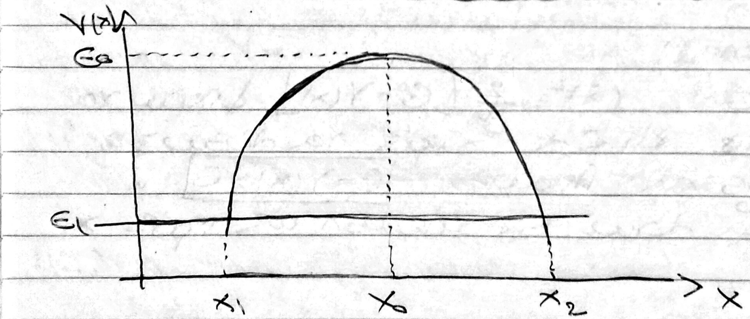
• Μελέτη των Σταθερών Σημείων

1) Δυναμικά που παρουσιάζουν ελάχιστα



Θεωρούμε E_1 η ενέργεια που αντιστοιχεί στις αρχικές συνθήκες, τότε $E_1 - V(x) \geq 0 \Rightarrow$ $x_1 \leq x \leq x_2$, με x_1, x_2 τα όρια της κίνησης.
Το σημείο $x = x_0$ στις περιπτώσεις που το δυναμικό παρουσιάζει ελάχιστο είναι ευσταθές.
Στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι και ελκυστής (attractor)

2) Δυναμικά που παρουσιάζουν μέγιστα



Στις περιπτώσεις αυτές οι λύσεις της ανίσωσης $E_1 - V(x) \geq 0 \Rightarrow x \leq x_1, x \geq x_2$ και δίνεται όρια κίνησης που είναι εκτός δυναμικού και το σημείο x_0 είναι ασταθές σημείο ισορροπίας

Παράδειγμα ①

Να βρεθούν τα όρια της κίνησης ενός σώματος που εκτοξεύεται με κατακόρυφη διεύθυνση από την επιφάνεια της γης με αρχική ταχύτητα v_0.

Λύση

Από τον νόμο της παγκόσμιας έλξης $\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r}$

από τον 2ο Νόμο του Newton: $\vec{F} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$

$\vec{r} = r\hat{r}$

Άρα έχω:

$-G\frac{Mm}{r^2}\hat{r} = m\ddot{r}\hat{r} \Rightarrow \boxed{\ddot{r} = -G\frac{M}{r^2}}$

Πολλαπλασιάζω με $\dot{r}$ και ολοκληρώνω:

$$\int \ddot{r}\cdot\dot{r}\,dt = \int -GM\frac{1}{r^2}\dot{r}\,dt \Rightarrow \int \ddot{r}\dot{r}\,dt = -GM\int\frac{\dot{r}}{r^2}\,dt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(\dot{r})^2 = -GM\int\frac{dr}{r^2} = GM\frac{1}{r} + \underbrace{c}_{\text{σταθερά}}$$

Άρα $\frac{1}{2}(\dot{r})^2 - \frac{GM}{r} = c = E$

και $E = \frac{1}{2}v_0^2 - \frac{GM}{R}$, R ακτίνα της γης

Επιπλέον εισάγω ένα δυναμικό $F(r) = -\frac{dV}{dr}$

$$\Rightarrow -\frac{GMm}{r^2} = -\frac{dV}{dr} \xRightarrow[\text{ως προς } r]{\text{ολοκληρώνω}} \boxed{V(r) = \frac{-GMm}{r}}$$

Τελικά: $E = \frac{1}{2}m(\dot{r})^2 + V(r)$

Τα όρια της κίνησης:

$$\frac{1}{2}(\dot{r})^2 - \frac{GM}{r} = E \Rightarrow \frac{1}{2}(\dot{r})^2 = E + \frac{GM}{r} \geq 0$$

$$\Rightarrow E + \frac{GM}{r} \geq 0 \Rightarrow E \geq -\frac{GM}{r} \Rightarrow r \geq -\frac{GM}{E}$$

$$E = \frac{1}{2}v_0^2 - \frac{GM}{R}$$

$$\frac{E}{GM} = \frac{v_0^2}{2GM} - \frac{1}{R} \quad \text{ή} \quad \frac{1}{r} \leq -\frac{E}{GM} = \frac{1}{R} - \frac{v_0^2}{2GM}$$

Προφανώς $r<0$ για να μπορέσω να φύγω από το πεδίο βαρύτητας της γης

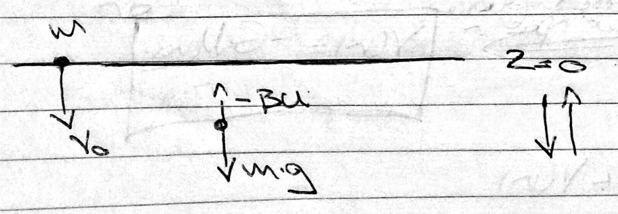
άρα $\frac{1}{R} - \frac{v_0^2}{2GM} \leq 0 \Rightarrow v_0^2 \geq \frac{2GM}{R}$ ή

ταχύτητα $v_0 = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$ ⇝ ελάχιστη ταχύτητα διαφυγής

Παράδειγμα ②

Τη χρονική στιγμή $t=0$ ένας αλεξιπτωτιστής πέφτει από το επίπεδο $z=0$ κατακόρυφα με ταχύτητα $v=v_0$. Αν η αντίσταση του αέρα είναι ανάλογη της ταχύτητας να βρείτε τη θέση και τη ταχύτητα του σε κάθε χρονική στιγμή.

Λύση



από τον νόμο του Newton: $m\frac{d^2z}{dt^2} = (mg - \beta\frac{dz}{dt})$

$$\Rightarrow m\ddot{z} = mg - \beta\dot{z} \Rightarrow \boxed{m\ddot{z} + \beta\dot{z} = mg}$$

Δ.Ε 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές άρα βρίσκω χαρακτηριστικό πολυώνυμο

Η λύση της είναι:

$$z(t) = \frac{mgt}{\beta} + \frac{m}{\beta}\left(v_0 - \frac{mg}{\beta}\right)\left(1 - e^{-\beta t/m}\right)$$

και η ταχύτητα της είναι:

$$v(t) = \frac{mg}{\beta} + \left(v_0 - \frac{mg}{\beta}\right)e^{-\beta t/m}$$

καθώς $t \to \infty$: $v(t) = \frac{mg}{\beta}$ (σταθερή ταχύτητα άρα θα κάνει ευθύγραμμη ομαλή κίνηση)

Άσκηση (σπίτι)

Υλικό σημείο μάζας m εκτελεί κίνηση πάνω σε κύκλο ακτίνας b. Τη χρονική στιγμή t=0 βρίσκεται στο σημείο A στην κορυφή κύκλου και αφήνεται να γλιστρήσει πάνω στην περιφέρεια του κύκλου. Να βρεθεί το σημείο που εγκαταλείπει τον κύκλο και η ταχύτητα του στο σημείο αυτό.